Hertentamen 1 Statistiek 2e jaar (Külske)
Alle boeken en eigen notities toegestaan

Dinsdag 29 januari 2007

1. Toon aan dat $\hat{\theta} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \log X_i}$ de maximum likelihood schatter voor een $B(\theta, 1)$-verdeling is!

   (De bijbehorende dichtheid is $f(y;\theta) = \theta y^{\theta-1}$ voor $y \in [0,1]$.)

2. In de situatie van opgave 1 definieer $Z = -\sum_{i=1}^{n} \log X_i$. Toon aan dat $2\theta W$ een $\chi^2(2n)$-verdeling heeft.

3. Laat $Y = X_1 - 2X_2 + 3X_3$ zijn als X_i onderling onafhankelijk identiek $\chi^2(6)$ verdeelde variabelen zijn.

   Toon aan dat $E(Y) = 12$, $\mathrm{var}(Y) = 168$.

4. Laat $X_1, X_2, \ldots, X_n$ onderling onafhankelijk identiek verdeelde variabelen met dichtheid $f_\theta(x) := f(x - \theta)$ zijn, waarbij θ de onbekende parameter is.

   Zo'n model heet een *location family* met de *location parameter* θ.

   Bereken de bijbehorende Fisher informatie $I(\theta) = \mathbf{E}\left(\left(\frac{\partial f_\theta(X_1)}{\partial \theta}\right)^2\right)$.

   Op welke manier hangt de θ-afhankelijkheid van de Fisher-informatie van de functie f af?

   Bereken $I(\theta)$ als f een standaard normale dichtheid is. Wordt dan de Cramer-Rao afschatting exact?

5. Er waren 7 open posities bij een bank. 80 kandidaten solliciteerden. Een groep A van 20 kandidaten was op dezelfde school als de zoon van de chairman, een groep B van 60 kandidaten niet.

   Het bleek dat 4 van de mensen die werden aangenomen kwamen uit groep A, en 3 uit groep B.

   Klinkt dat unfair of niet unfair, statistisch gezien?

   Kun je de nulhypothese van een faire verdeling tot een niveau van 5 percent afwijzen? Kun je de nulhypothese tot een niveau van 10 percent afwijzen? Bereken de bijbehorende P-waarde!